

Содержание

1	Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации	1
1.1	Стандартный алгоритм оптимальной нелинейной дискретной фильтрации	2
1.1.1	Постановка задачи оптимальной нелинейной дискретной фильтрации	2
1.1.2	Оценки, формируемые алгоритмом оптимальной нелинейной фильтрации	3
1.1.3	Уравнения оптимальной нелинейной дискретной фильтрации	3
1.1.4	Вопросы практической реализации оптимальной нелинейной фильтрации	4
1.2	Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации	4
1.2.1	Критерий оптимальности ОТФ	5
1.2.2	Уравнения оптимальной траекторной фильтрации	5
1.2.3	Отличия алгоритма оптимальной траекторной фильтрации	6
1.2.4	Вопросы практической реализации оптимальной траекторной фильтрации	7
2	Оптимальная траекторная фильтрация фазы сигнала	9
2.1	Постановка задачи	9
2.2	Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации фазы	10
2.3	Моделирование оптимальной траекторной фильтрации фазы	11
2.3.1	Результаты моделирования	13
2.3.2	Оценка точности алгоритмов	15
2.3.3	Сравнение алгоритмов оптимальной фильтрации	15
3	Выводы	16

1 Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации

Задача оценки параметров навигационного сигнала относится к классу нелинейной фильтрации, т.к. функция, описывающая сигнал, является нелинейной. Параметры сигнала, такие, как фаза, частота и задержка, предполагаются заранее неизвестными и изменяющимися по случайному закону. Наибольшие результаты получены при описании закона изменения параметров сигналов в виде многомерных марковских процессов, что даёт возможность использовать теорию оптимальной нелинейной фильтрации. Уравнения оптимальной фильтрации позволяют получить для любого момента времени на интервале наблюдений апостериорную плотность вероятности информативных параметров сигналов. Апостериорная плотность вероятности содержит максимально возможную информацию о процессе (в рамках поставленной задачи). С использованием апостериорной плотности вероятности можно сформировать различные виды оценок информативных параметров в зависимости от используемой функции потерь.

В то же время уравнения оптимальной нелинейной фильтрации сложны для реализации. Аналитическое решение уравнений оптимальной фильтрации известно

только для линейной задачи. Для задачи нелинейной фильтрации возможна численный расчёт уравнений оптимальной фильтрации, что требует хранения в памяти и обновление массива данных, описывающего текущее значение апостериорной плотности вероятности. Расчёт апостериорной плотности вероятности требует на каждом шаге вычисления для каждой точки представления апостериорной плотности вероятности корреляционных интегралов и экспоненты для расчёта функции правдоподобия, что сложно реализовать практически.

В связи с этим распространённой практикой является использование гауссовского приближения апостериорной плотности вероятности. Гауссовская плотность вероятности описывается всего двумя параметрами — математическим ожиданием и дисперсией, что позволяет перейти от расчёта всей апостериорной плотности вероятности к уравнениям эволюции параметров гауссовской плотности вероятности. Данный метод известен, как расширенный фильтр Калмана. При большом отношении сигнал/шум точность слежения высока и апостериорная плотность хорошо описывается гауссовской функцией. Расширенный фильтр Калмана в этом случае даёт результат, не отличающийся от результата расчёта уравнений оптимальной нелинейной фильтрации. Однако при низком отношении сигнал/шум апостериорная плотность вероятности существенно отличается от гауссовской, в результате чего расширенный фильтр Калмана становится неработоспособным. Именно это происходит при срыве слежения в расширенном фильтре Калмана.

В работе [?] предложен другой способ оценки параметров сигналов — оптимальная траекторная фильтрация. Данный способ предполагает изменение критерия оптимальности. Вместо расчёта апостериорной плотности параметров в текущий момент рассчитывается апостериорная плотность вероятности всего процесса изменения параметров от начала наблюдений. Это даёт возможность упростить практическую реализацию алгоритмов оптимальной фильтрации.

Учитывая сходство алгоритма траекторной фильтрации и стандартных уравнений оптимальной дискретной фильтрации, позволяющих вычислить апостериорную плотность вероятности вектора состояния для текущей точки, далее сопоставляются эти два алгоритма. Кроме того, проведено сравнение с традиционно используемым алгоритмом расширенного фильтра Калмана.

1.1 Стандартный алгоритм оптимальной нелинейной дискретной фильтрации

Рассмотрим сначала классические уравнения оптимальной нелинейной дискретной фильтрации. Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации во многом совпадает с ними.

1.1.1 Постановка задачи оптимальной нелинейной дискретной фильтрации

Задача оптимальной нелинейной фильтрации описывается следующим образом. Входной сигнал задаётся уравнением входных наблюдений:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{s}(\lambda_k) + \mathbf{n}_k, \quad (1)$$

где $s(\lambda_k)$ — функция, описывающая сигнал, λ_k — неизвестные параметры сигнала, n_k — аддитивные шумы наблюдений, в общем случае негауссовские, но в практических задачах сигнальной обработки являющиеся гауссовскими шумами с дисперсионной матрицей \mathbf{D}_n . Изменение параметров сигнала во времени описывается выражением:

$$\lambda_k = \mathbf{H} \cdot \mathbf{x}_k,$$

где \mathbf{H} — матрица, \mathbf{x}_k — вектор состояния процесса.

Второй составляющей постановки задачи является *уравнение динамики изменения вектора состояния*:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_k. \quad (2)$$

В данном выражении матрица \mathbf{F} описывает детерминированную динамику изменения процесса, а матрица \mathbf{G} и вектор формирующих шумов ξ_k описывают случайную составляющую. Вектор формирующих шумов ξ_k обычно полагается гауссовским с дисперсионной матрицей \mathbf{D}_ξ . В качестве начального условия задаётся плотность вероятности вектора состояния $p(\mathbf{x}_0)$.

1.1.2 Оценки, формируемые алгоритмом оптимальной нелинейной фильтрации

В стандартной постановке задачи оптимальной нелинейной фильтрации требуется сформировать оценку вектора состояния параметров сигнала \mathbf{x}_k для текущего момента времени t_k .

Согласно теории оптимальной фильтрации максимум информации о процессе \mathbf{x}_k содержится в его *апостериорной плотности вероятности*:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k). \quad (3)$$

В зависимости от критерия оптимальности можно по апостериорной плотности вероятности можно сформировать ту или иную оценку значения вектора состояния. Уравнения оптимальной фильтрации вместо конкретной оценки позволяют сформировать апостериорную плотность вероятности для получения максимума информации. Например, при использовании критерия минимума апостериорного риска с квадратичной функцией потерь необходимо по апостериорной плотности вероятности определить среднее значение [?]:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) d\mathbf{x} \quad (4)$$

При простой функции потерь необходимо определять максимум апостериорной плотности вероятности:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = \max_{\mathbf{x}_k} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k) \quad (5)$$

1.1.3 Уравнения оптимальной нелинейной дискретной фильтрации

Уравнения оптимальной фильтрации, описывающие изменение апостериорной плотности вероятности процесса \mathbf{x}_k осуществляются в два шага.

На *первом шаге* имеющаяся на предыдущий момент времени $k - 1$ оценка апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_0^{k-1})$ экстраполируется на следующий момент времени с использованием переходной плотности вероятности $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$, в результате чего получается экстраполированная — ожидаемая оценка плотности вероятности процесса $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^{k-1})$:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^{k-1}) = \int_{\mathbf{x}_{k-1}} p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathbf{Y}_0^{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (6)$$

На *втором шаге* осуществляются наблюдения за процессом, рассчитывается функция правдоподобия $p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$ и вычисляется апостериорная плотность вероятности $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^k)$:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^k) = c p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^{k-1}) \quad (7)$$

Выполнение алгоритма происходит рекуррентно и начинается с некоторого начального значения плотности вероятности процесса $p(\mathbf{x}_0|\mathbf{Y}_0) = p(\mathbf{x}_0)$.

1.1.4 Вопросы практической реализации оптимальной нелинейной фильтрации

При практической реализации данного алгоритма необходимо представить апостериорную плотность вероятности $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_0^k)$ в виде массива чисел. Если наблюдаемый процесс \mathbf{x}_k будет многомерным, то потребуются многомерный массив соответствующей размерности. Количество точек представления данного массива определяется возможными пределами изменения процесса \mathbf{x}_k и требуемой точностью его представления.

Далее, на каждом шаге необходимо рассчитать функцию правдоподобия. Обычно сигнал наблюдается на фоне аддитивных гауссовских шумов, в этом случае функция правдоподобия будет иметь вид:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k) = c \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k))^T \mathbf{D}_n^{-1} (\mathbf{y}_k - \mathbf{s}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)) \right\}$$

Расчёт функции правдоподобия необходимо выполнить для каждой точке представления апостериорной плотности вероятности. В каждой точке нужно сформировать опорный сигнал $\mathbf{s}(\mathbf{H}\mathbf{x}_k)$, вычислить корреляционные интегралы и экспоненту. На практике обычно это слишком сложно в реализации, поэтому повсеместно используются приближённые решения данных уравнений, обычно расширенный фильтр Калмана.

1.2 Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации

Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации может быть найден в статье [?]. Данный алгоритм следует из уравнений оптимальной нелинейной фильтрации (6), (7) и отличается видом формируемой оценки.

1.2.1 Критерий оптимальности ОТФ

Метод оптимальной траекторной фильтрации предполагает формирование апостериорной плотности всего процесса \mathbf{x}_0^k от начала наблюдений 0 до текущего момента k вместо апостериорной плотности в текущей точке, т.е. формируется плотность вероятности $p(\mathbf{x}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)$ вместо $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^k)$. Вместо критериев для формирования оценок в текущей точке, таких, как (4), (5), используются критерии оптимальной оценки процесса за весь интервал наблюдений. Результат известен для простой функции потерь, приводящей к оценке:

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^k = \arg \max_{\mathbf{x}_0^k} p(\mathbf{x}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) \quad (8)$$

1.2.2 Уравнения оптимальной траекторной фильтрации

Совместная плотность вероятности $p(\mathbf{x}_0^k, \mathbf{Y}_0^k)$ может быть представлена в виде:

$$p(\mathbf{x}_0^k, \mathbf{Y}_0^k) = p(\mathbf{x}_0^k | \mathbf{Y}_0^k) \cdot p(\mathbf{Y}_0^k).$$

Оценка положения максимума апостериорной плотности вероятности по \mathbf{x}_0^k не зависит от плотности вероятности входного процесса $p(\mathbf{Y}_0^k)$, поэтому вместо апостериорной плотности вероятности $p(\mathbf{x}_0^k | \mathbf{Y}_0^k)$ в алгоритме можно использовать совместную плотность $p(\mathbf{x}_0^k, \mathbf{Y}_0^k)$. Для получения алгоритма вводится следующая функция:

$$\Phi_k(\mathbf{x}_k) = \max_{\mathbf{x}_0^{k-1}} p(\mathbf{x}_0^k, \mathbf{Y}_0^k).$$

Данная функция пропорциональна максимуму апостериорной плотности вероятности траектории процесса \mathbf{x}_0^{k-1} с концом в точке \mathbf{x}_k . Рекуррентное вычисление данной функции и является основой алгоритма оптимальной траекторной фильтрации.

Совместная плотность вероятности отслеживаемого процесса и наблюдений может быть получена рекуррентно:

$$p(\mathbf{x}_0^k, \mathbf{Y}_0^k) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_0^{k-1}, \mathbf{y}_0^{k-1})$$

Если подставить данное выражение в определение функции $\Phi_k(\mathbf{x}_k)$, то можно получить рекуррентный алгоритм вычисления этой функции.

Как и стандартные уравнения оптимальной фильтрации, алгоритм может быть разбит на два шага. На первом шаге рассчитывается экстраполированное значение функции $\Phi_k(\mathbf{x}_{k-1})$:

$$\Phi_k(\mathbf{x}_{k-1}) = \max_{\mathbf{x}_{k-1}} \{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) \Phi_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1})\} \quad (9)$$

На втором шаге учитываются наблюдения \mathbf{y}_k на текущем шаге:

$$\Phi_k(\mathbf{x}_k) = c p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) \Phi_k(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (10)$$

В такой форме в виде двух шагов, выполняемых рекуррентно, данный алгоритм легко сопоставить со стандартным оптимальным алгоритмом фильтрации, описываемым двумя уравнениями. Уравнение расчёта апостериорной плотности вероятности (7) полностью по форме совпадает с уравнением расчёта функции $\Phi_k(\mathbf{x}_k)$ (10).

Отличие алгоритмов заключается в формулах экстраполяции. В алгоритме нелинейной фильтрации необходимо вычислять интеграл произведения апостериорной плотности вероятности на прошлом шаге $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_0^l)$ на переходную плотность вероятности $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ (6). В алгоритме оптимальной траекторной фильтрации нужно лишь найти максимум данного произведения (9).

1.2.3 Отличия алгоритма оптимальной траекторной фильтрации

Малые различия в алгоритмах существенны для практической реализации. Алгоритм оптимальной нелинейной фильтрации необходимо реализовывать в строгом соответствии с формулами (6), (7). Данные формулы содержат вычисление экспонент, умножения и другие операции, сложные для реализации в аппаратуре.

В отличие от него уравнения оптимальной траекторной фильтрации могут быть существенно упрощены. Вместо функции $\Phi_k(\mathbf{x}_k)$ можно рассмотреть её логарифм. Функция логарифмирования является монотонно возрастающей, поэтому она не влияет на операцию взятия максимума. Выражение (9) может быть приведено к виду:

$$\ln \Phi_k(\mathbf{x}_{k-1}) = \max_{\mathbf{x}_{k-1}} \{ \ln p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) + \ln \Phi_{k-1}(\mathbf{x}_{k-1}) \} \quad (11)$$

Аналогично, логарифм можно взять и от второго уравнения (10):

$$\ln \Phi_k(\mathbf{x}_k) = \ln p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) + \ln \Phi_k(\mathbf{x}_{k-1}) \quad (12)$$

При этом исключаются операции расчёта экспонент, умножения и интегрирования.

Тем не менее, остаётся необходимость хранения массива значений функции $\ln \Phi_k(\mathbf{x}_k)$. Это является одновременно и недостатком, и достоинством алгоритма. Недостаток заключается в большом объёме данных для хранения данного массива и большом (относительно расширенного фильтра Калмана) количестве операций на расчёт этих данных.

В качестве достоинства данного подхода является формирование апостериорной плотности вероятности одновременно для всех возможных значений вектора состояния. Именно это рассматривается, как невозможность срыва слежения (по крайней мере, при точной реализации алгоритма по рассмотренным формулам).

Впрочем, всё зависит от того, как определить срыв слежения. На рис. 1 приведено распределение, полученное в результате слежения за фазой и частотой с использованием алгоритма оптимальной траекторной фильтрации (подробно данная задача рассмотрена в разд. 2). По одной оси отложена фаза сигнала, по другой — частота. Моделирование проведено при достаточно низком отношении мощности 15 дБГц, при котором расширенный фильтр Калмана не способен следить за сигналом без срывов (в заданных условиях).

В алгоритме оптимальной траекторной фильтрации срывы отсутствуют — он анализирует распределение процесса для всех возможных значений фазы и частоты. Однако на рис. 1 можно видеть, что распределение по фазе содержит несколько локальных максимумов, причём самые большие из них близки по величине. Оценка фазы при использовании простой функции потерь формируются, как максимум данной функции, согласно критерию (8). При состоянии, приведённом на рис. 1, оценка фазы будет близка к нулю. Однако при дальнейшей обработке ближайший слева

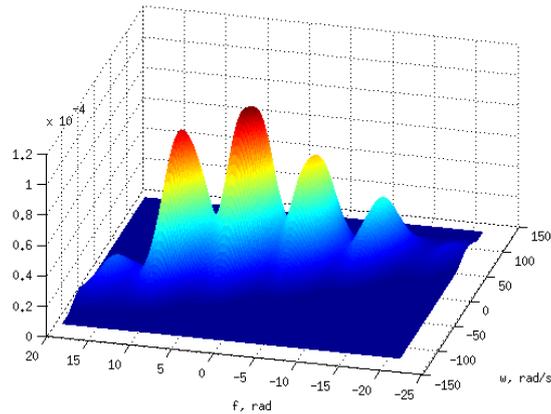


Рис. 1: Пример результата слежения за фазой и частотой

максимум может оказаться больше по величине, в этом случае в оценке фазы будет скачок на 2π . Аналогичные процессы происходят и в расширенном фильтре Калмана, когда слежение за фазой переходит в соседний ноль периодичной дискриминационной характеристики фазового дискриминатора.

Можно, конечно, построить распределение фазы в диапазоне одного периода и получать оценку не полной, а приведённой фазы, но сути это не меняет. В расширенном фильтре Калмана также можно формировать оценку приведённой к периоду фазы — и считать, что срывы не происходят. Таким образом, это вопрос трактовки результатов.

Более важным отличием от расширенного фильтра Калмана всё-таки является более аккуратная аппроксимация апостериорной плотности вероятности (по сравнению с расширенным фильтром Калмана, полагающим распределение гауссовским и оценивающим два его момента). Апостериорная плотность может быть существенно негауссовской.

На рис. 1 можно видеть, в чём заключается поиск оптимальной траектории. По результатам обработки получено несколько максимумов, каждому из которых соответствует своя траектория изменения фазы. Также получены вероятности, соответствующие каждому из максимумов. Таким образом, проведя анализ распределения на прошлых шагах, можно сформировать наиболее правдоподобную на данный момент траекторию изменения оцениваемого параметра.

1.2.4 Вопросы практической реализации оптимальной траекторной фильтрации

Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации основан на численном представлении апостериорной плотности. Как и при реализации оптимальной нелинейной фильтрации, алгоритм оптимальной траекторной фильтрации предполагает хранение оценки апостериорной плотности вероятности для всего вектора состояния. Это означает, что количество компонент вектора состояния будет определять размерность массива, необходимого для хранения апостериорной плотности.

Например, для реализации системы оценки фазы 2 порядка требуется хранить двумерный массив, для системы оценки 3 порядка — трёхмерный массив. Шаг раз-

биения массива по каждой компоненте вектора состояния определяется дисперсией формирующих шумов в модели динамики исходного процесса (2) \mathbf{D}_ξ . Модель динамики определяет вид переходной матрицы $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1})$. При линейной модели с гауссовскими шумами переходная матрица будет гауссовская:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \cdot \sqrt{\det(\mathbf{D}_\xi)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1})^T (\mathbf{G}\mathbf{D}_\xi\mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{x}_k - \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}) \right\}$$

Таким образом, для правильного воспроизведения гауссовской плотности вероятности шаг разбиения по каждому из параметров должен быть меньше среднеквадратического значения дисперсии соответствующего формирующего шума (с учётом коэффициентов из матрицы \mathbf{G}). На рис. 2 приведено численное представление переходной плотности вероятности по фазе при разной величине шага, на правом графике шаг разбиения слишком велик, что приводит к недостаточно точной аппроксимации. Чем

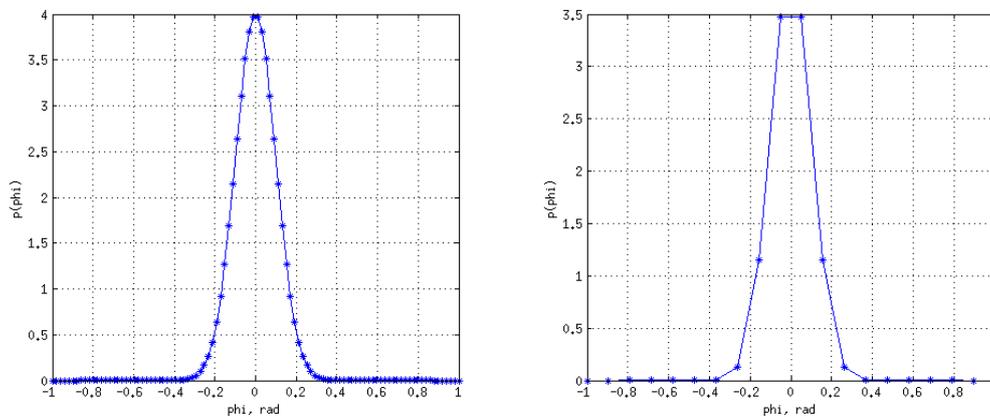


Рис. 2: Варианты шага разбиения по фазе

меньше дисперсия формирующего шума, тем меньше должен быть шаг разбиения по соответствующему параметру.

Если количество формирующих шумов в модели меньше, чем количество компонент вектора состояния, что часто встречается на практике, то эффективная размерность переходной плотности вероятности сокращается, однако размерность апостериорной плотности вероятности по-прежнему определяется количеством компонент вектора состояния. Расчёт шага представления параметров, не имеющих собственных формирующих шумов в этом случае более сложный и зависит от уравнения вида уравнения динамики (2). В конечном счёте шаг разбиения по остальным параметрам всё равно пропорционален среднеквадратическому значению формирующих шумов.

Количество ячеек представления апостериорной плотности по каждому из параметров кроме шага зависит от пределов, в которых могут изменяться соответствующие параметры. Так, например, по фазе можно строить алгоритм, рассчитывающий распределение, приведённое к периоду фазы, т.е. к 2π . Для слежения за задержкой теоретически диапазон представления задержки должен соответствовать периоду дальномерного кода. На практике придётся ограничиваться некоторым диапазоном в окрестности текущей оценки. Минимальная ширина этого диапазона определяется

динамикой изменения задержки и отношением сигнал/шум, что требует отдельной оценки.

Пример представления двумерной плотности вероятности (для алгоритма оценки фазы 2 порядка) приведён на рис. 3.

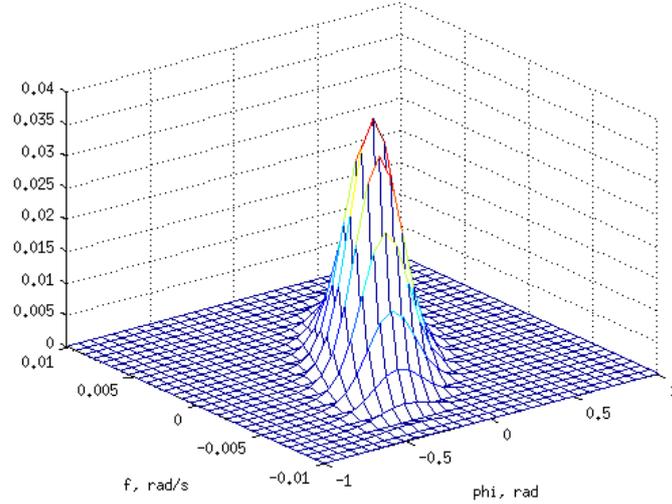


Рис. 3: Пример численного представления двумерной плотности вероятности

2 Оптимальная траекторная фильтрация фазы сигнала

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим фильтрацию фазы на примере 2 порядка. Входные наблюдения имеют вид:

$$y_{k,i} = A \cos((\omega_0 + \omega_k) t_{k,i} + \varphi_k) + n_i, \quad (13)$$

где A — амплитуда сигнала, ω_0 — несущая частота сигнала, ω_i — текущая частота сигнала, φ_i — фаза сигнала, n_i — аддитивный гауссовский белый шум с дисперсией D_n .

Модель входной процесса фазы имеет вид:

$$\begin{cases} \varphi_k = \varphi_{k-1} + T \cdot \omega_{k-1}, \\ \omega_k = \omega_{k-1} + \xi_k. \end{cases} \quad (14)$$

В данной модели φ_k — фаза сигнала, ω_k — частота сигнала, $T = T_D \cdot Nd$ — интервал работы алгоритма, ξ_k — отсчёт формирующего шума с дисперсией D_ξ .

В модели используется двойная нумерация шкалы времени $t_{k,i} = T \cdot k + T_D \cdot i$. Требуется оценить частоту и фазу сигнала в моменты времени $t_k = t_{k,0}$.

2.2 Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации фазы

Задача поставлена в расчёте на метод группировки измерений. Отслеживаемые параметры — частота и задержка считаются постоянными на интервалах времени T от $t_{k-1,0}$ до $t_{k,0}$ и изменяющие свои значения в эти моменты времени.

Модель динамики изменения процесса в векторном виде:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{G}\xi_k,$$

где $\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \varphi_k \\ \omega_k \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, дисперсия формирующих шумов D_ξ .

Для реализации первого шага алгоритма, (6), необходимо определить переходную плотность вероятности, которая для данного процесса имеет вид:

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\xi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D_\xi} (\omega_k - \omega_{k-1})^2 \right\} \delta \{ \varphi_k - (\varphi_{k-1} + T \cdot \omega_{k-1}) \}, \quad (15)$$

где $\delta(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$.

Функция правдоподобия сигнала, входящая во второе уравнение алгоритма (7), в данном случае определяется выражением:

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{Nd \cdot D_n}} \exp \left\{ -\frac{1}{2D_n} \left(\sum_{i=0}^{Nd} y_{k,i} - \cos((\omega_0 + \omega_k)t_{k,i} + \varphi_k) \right)^2 \right\} \quad (16)$$

Для целей моделирования функция правдоподобия может быть легко рассчитана с использованием методики, аналогичной методике эквивалентных дискриминаторов. В реальном приёмном устройстве данное выражение предполагает реализацию коррелятора для каждого сочетания частоты и задержки. Можно показать, что при относительно малых временах интегрирования T зависимостью функции правдоподобия от частоты можно пренебречь, в этом случае необходимы только корреляторы для разных значений фазы. Учитывая специфику зависимости функции правдоподобия от фазы, в реальности достаточно сделать два канала коррелятора с ортогональными сигналами “cos” и “sin”, а для остальных значений фазы функцию правдоподобия можно рассчитать с использованием тригонометрических формул.

Наиболее сложным в реализации алгоритма слежения является вопрос представления апостериорной плотности вероятности. Для реализации алгоритма траекторной фильтрации фазы необходимо представить апостериорную плотность вероятности по двум параметрам (фазе и частоте) в виде массива.

Шаг разбиения массива по частоте определяется дисперсией формирующего шума D_ξ в модели динамики фазы (14). В соответствии с данной моделью на каждом шаге к текущей частоте прибавляется гауссовская случайная величина. Гауссовскую кривую можно считать ограниченной в пределах $[-3\sqrt{D_\xi}; +3\sqrt{D_\xi}]$. Для аккуратного представления гауссовской кривой необходимо не менее 9 точек, в этом случае шаг представления по частоте будет равен $\Delta\omega = \frac{1}{3}\sqrt{D_\xi}$. Данную величину можно уточнять в зависимости от требований по точности, предъявляемых к системе.

Шаг разбиения по фазе выбирается иначе, т.к. в модели (14) отсутствует формирующий шум фазы. Однако на каждом шаге к фазе прибавляется текущая частота,

умноженная на T , а она содержит, в свою очередь, формирующие шумы наблюдений. Таким образом, шаг представления фазы должен быть не больше $\Delta\varphi = \frac{1}{3}\sqrt{D_\xi} \cdot T$.

Объём массива для представления апостериорной плотности зависит также от пределов изменения параметров за интервал наблюдений. Модель (14) содержит ви-неровский процесс изменения частоты, дисперсия которого пропорциональна времени, поэтому для соответствия модели предел изменения частоты должен быть равен:

$$\omega_{\max} = 3 \cdot \sqrt{D_\xi} \cdot \sqrt{N},$$

где N — количество интервалов накопления сигнала, в течении которых будет проводится анализ. В пределе это бесконечность, но частота реального сигнала всё-же не в полной мере соответствует модели (14) и не может принимать бесконечные значения. Поэтому при реализации оптимальной траекторной фильтрации эта величина должна быть выбрана с учётом требований к реальной аппаратуре.

Представление фазы принципиально может быть двух видов — приведённое к периоду и неприведённое. В реальной системе слежения необходимо использовать приведённую к периоду фазу, чтобы ограничить объём массива. Однако в исследовательских целях для получения наглядных результатов в точном соответствии с уравнениями траекторной фильтрации (9), (10), не предполагающим приведения к периоду, далее представлены результаты для неприведённой к периоду фазы. В этом случае пределы изменения фазы имеют вид:

$$\varphi_{\max} = 3 \cdot \sqrt{D_\xi} \cdot T \cdot N\sqrt{N}.$$

Объём массива, необходимого для представления двумерной модели фазы, можно определить с использованием следующих выражений.

$$N_\varphi = 2 \frac{\varphi_{\max}}{\Delta_\varphi},$$

$$N_\omega = 2 \frac{\omega_{\max}}{\Delta_\omega}.$$

Массив апостериорной плотности вероятности инициализируется начальной плотностью вероятности, при её отсутствии — равномерным распределением.

Далее алгоритм работает рекуррентно в соответствии с выражениями (11), (12). Переходная плотность вероятности определяется выражением (15), функция правдоподобия — (16).

В результате получен алгоритм, структура которого приведена на рис. Структура, приведённая на рис. 4, содержит два квадратурных канала коррелятора, блок вычисления логарифма функции правдоподобия, блок вычисления матрицы переходной плотности вероятности, массив для хранения отсчётов функции $\ln \Phi_k(\mathbf{x}_k)$ и алгоритмы поиска максимума.

2.3 Моделирование оптимальной траекторной фильтрации фазы

С целью оценки характеристик оптимальной траекторной фильтрации фазы сигнала создана имитационная модель алгоритма и проведено моделирование. Модель

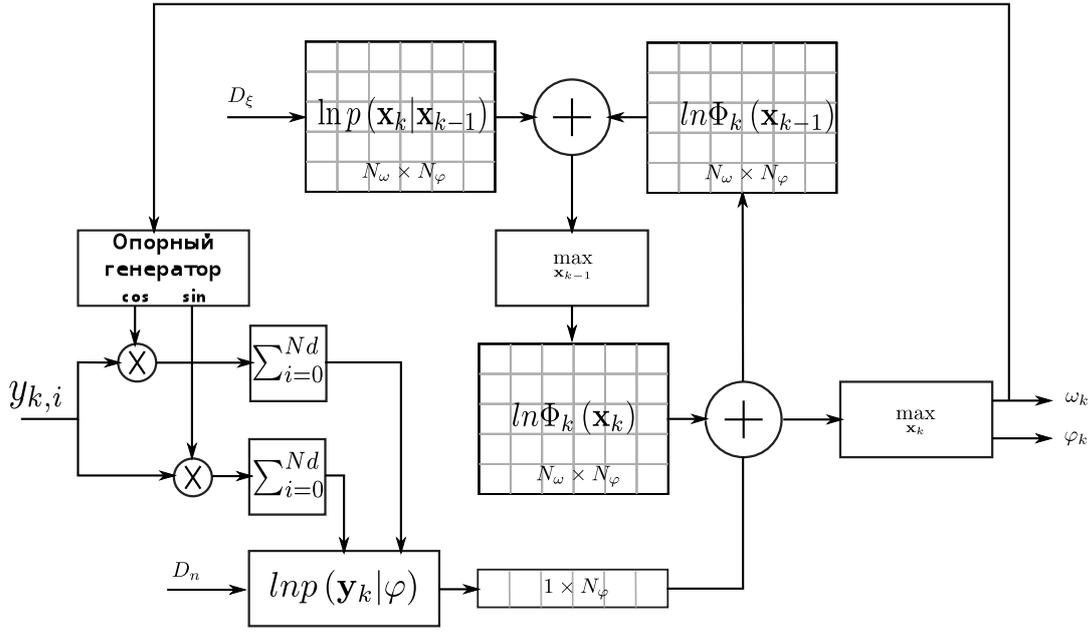


Рис. 4: Структура алгоритма оптимальной траекторной фильтрации фазы

непосредственно алгоритма траекторной фильтрации воспроизводит структуру алгоритма, приведённую на рис. 4.

Для сравнения в модель включены ещё два алгоритма. Первый — алгоритм обработки на основе уравнений оптимальной нелинейной фильтрации (6), (7). Шаг представления фазы и частоты в данной модели выбирается аналогично тому, как это сделано для алгоритма траекторной фильтрации. Структура алгоритма оптимальной фильтрации напоминает структуру алгоритма траекторной фильтрации и приведена на рис. 5.

Сравнивая рис. 5 и 4, можно видеть отличия данных алгоритмов. В алгоритме оптимальной фильтрации хранятся массивы плотностей, а не логарифмов плотностей, над ними выполняется операция умножения, а не сложения. Главное отличие — вместо расчёта операции максимума выполняется операция интегрирования. Всё это в совокупности делает данный алгоритм сложным для реализации.

Второй алгоритм для сравнения — расширенный фильтр Калмана, традиционно используемый для синтеза систем слежения за фазой. Алгоритм описывается хорошо известными уравнениями, приведёнными ниже в форме, описывающей систему слежения за фазой.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_k &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{K}_k U_{\Delta\varphi} / S_{\Delta\varphi}, \\
 \mathbf{K}_k &= \mathbf{D}_{x,k} \mathbf{H}^T D_n^{-1}, \\
 \tilde{\mathbf{D}}_k &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{D}}_{k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{G} D_\xi \mathbf{G}^T, \\
 \hat{\mathbf{D}}_k &= \left(\tilde{\mathbf{D}}_k^{-1} + \mathbf{H}^T D_n^{-1} \mathbf{H} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

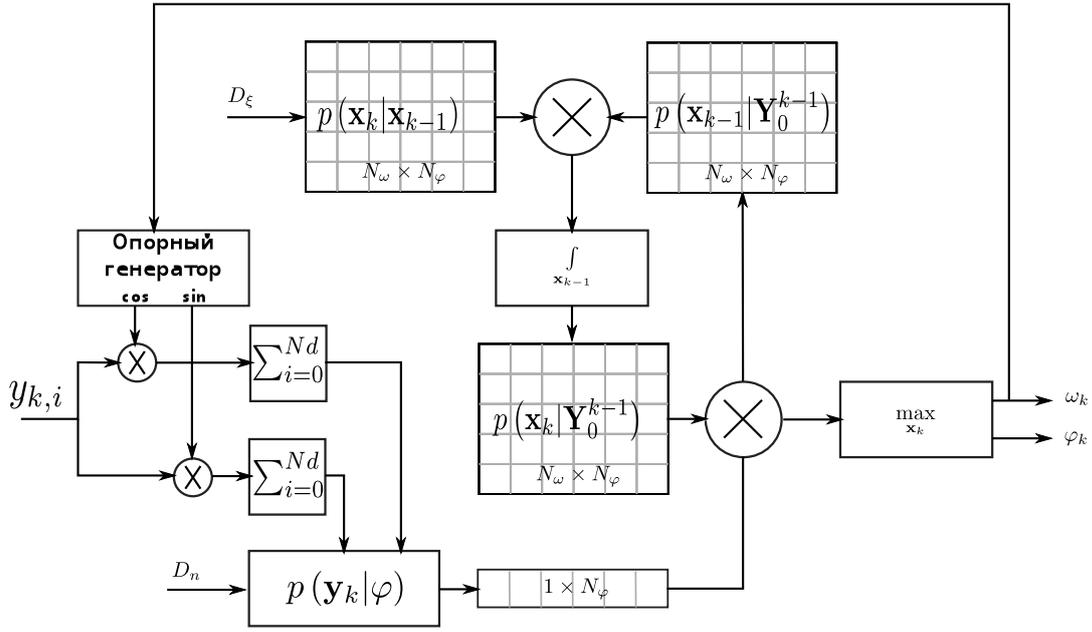


Рис. 5: Структура алгоритма оптимальной фильтрации

Структура алгоритма приведена на рис. 6. Таким образом, в модели полностью воспроизводится расширенный фильтр Калмана с изменяемыми во времени коэффициентами.

Моделирование проведено для процесса изменения фазы, динамика которого описывается уравнением (14). Спектральная плотность формирующего шума взята равной $S_\xi = 11 \text{ рад}^2/\text{с}^3$, что является типичным значением для распространённых в аппаратуре потребителей термокомпенсированных кварцевых генераторов Golledge GCXO. Таким образом, динамика изменения фазы определяется только шумами опорного генератора, в модели отсутствует другая динамика.

Интервал работы фильтра принят равным 20 мс.

2.3.1 Результаты моделирования

Сначала для проверки работоспособности алгоритмов проведено моделирование при высоком отношении мощности сигнала к спектральной плотности шума 30 дБ-Гц. При данном значении справедлива гауссовская аппроксимация апостериорной плотности вероятности и расширенный фильтр Калмана должен давать результаты, совпадающие с результатами оптимальной фильтрации.

Ошибка слежения за фазой приведена на рис. 7. На графике введены обозначения: РФК — расширенный фильтр Калмана, ОФ — оптимальная фильтрация, ОТФ — оптимальная траекторная фильтрация. На данном графике можно видеть, что в начальный момент времени в расширенном фильтре Калмана наблюдается переходной процесс. После установления переходного процесса реализация ошибки слежения расширенного фильтра Калмана практически совпадает с реализациями ошибки в

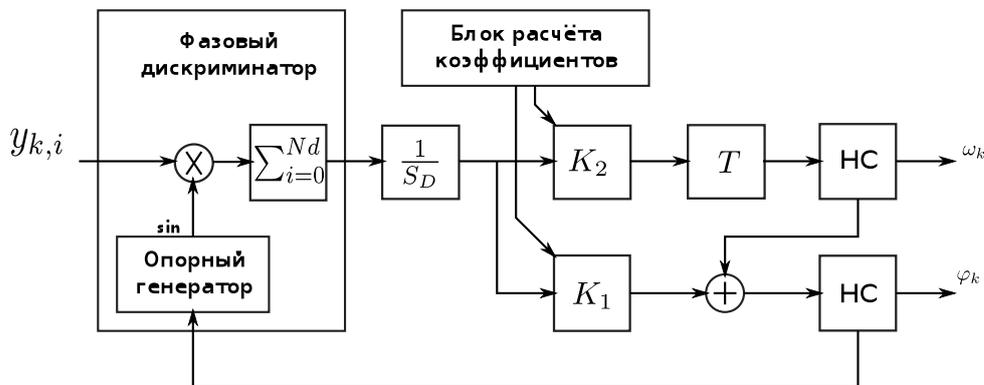


Рис. 6: Структура расширенного фильтра Калмана

двух других алгоритмах. Отличия между оптимальной фильтрацией и оптимальной траекторной фильтрацией практически отсутствуют — графики сливаются.

График ошибки слежения за частотой приведён на рис. 8. При слежении за частотой наблюдается та же картина, что и при слежении за фазой.

Теперь рассмотрим слежение при низком отношении сигнал/шум — 20 дБГц. Ошибка слежения за фазой приведена на рис. 9. На данном графике можно видеть, в начале все три алгоритма дают сходный результат. Однако через некоторое время в расширенном фильтре Калмана происходит срыв слежения. В то же время, алгоритмы оптимальной фильтрации и оптимальной траекторной фильтрации продолжают следить за сигналом. Результаты измерений этих двух алгоритмов несколько отличаются, но реализации ошибок похожи друг на друга. Следует отметить, что значение ошибки слежения за фазой находится в области, неприемлемой для расширенного фильтра Калмана, что и послужило причиной срыва слежения.

На рис. 10 приведена реализация ошибки слежения за частотой. На графике видно, что в начале оценки частоты всех алгоритмов совпадают. Однако при срыве слежения в расширенном фильтре Калмана происходит скачок частоты, после чего ошибка в расширенном фильтре Калмана становится существенно больше ошибки в других алгоритмах. Как и для фазы, результаты измерения оптимальным алгоритмом фильтрации и оптимальным траекторным алгоритмом фильтрации близки друг к другу.

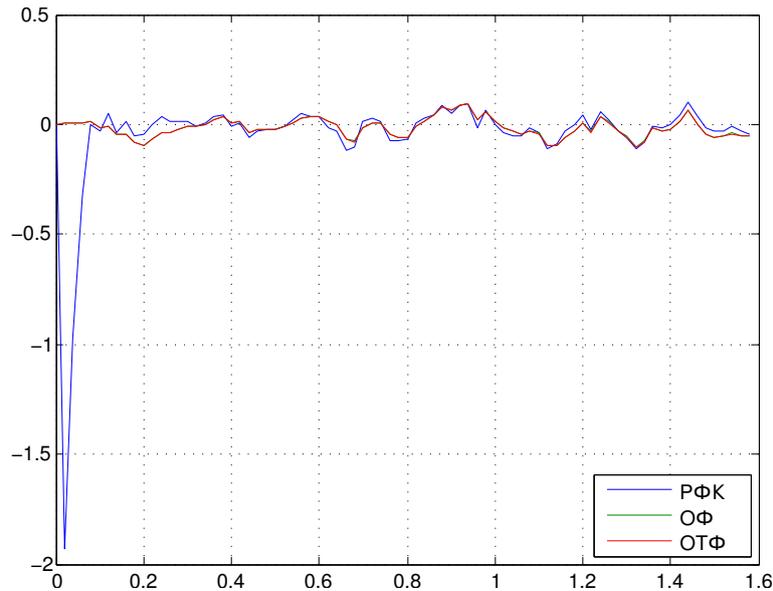


Рис. 7: Ошибка слежения за фазой при 30 дБГц

2.3.2 Оценка точности алгоритмов

С целью оценки точности проведено статистическое имитационное моделирование всех трёх алгоритмов. В процессе моделирования многократно повторялось слежение за сигналом, в результате чего было рассчитано среднеквадратическое значение ошибок оценок фазы.

На рис. 11 приведена зависимость точности оценки фазы от отношения мощности сигнала к спектральной плотности шума. Из графика можно видеть, что примерно при 19 дБГц ошибка слежения за фазой резко увеличивается в расширенном фильтре Калмана, в то время. В то же время в двух других алгоритмах ошибка оценки фазы нарастает постепенно и в диапазоне 12-20 дБГц существенно меньше, чем в расширенном фильтре Калмана. Результаты оптимальной фильтрации и оптимальной траекторной фильтрации практически совпадают.

На рис. 12 приведена зависимость точности оценки частоты от отношения мощности сигнала к спектральной плотности шума. При 19 дБГц алгоритм расширенного фильтра Калмана оказывается неработоспособен и ошибка оценки частоты резко возрастает. Алгоритмы оптимальной фильтрации и оптимальной нелинейной фильтрации работоспособны вплоть до 12 дБГц.

2.3.3 Сравнение алгоритмов оптимальной фильтрации

В приведённых выше результатах разница между алгоритмами оптимальной фильтрации и оптимальной траекторной фильтрации практически отсутствует. Рассмотрим различие между алгоритмами подробнее. Для этого проведено моделирование при $q_c/n_0 = 20$ дБГц.

Апостериорная плотность вероятности фазы и частоты для двух рассматриваемых алгоритмов приведена на рис. 13. Можно видеть, что плотность вероятности для двух алгоритмов практически одинакова. Справа изображён график для оптимальной траекторной фильтрации, видно, что верхушка фигуры более заострённая.

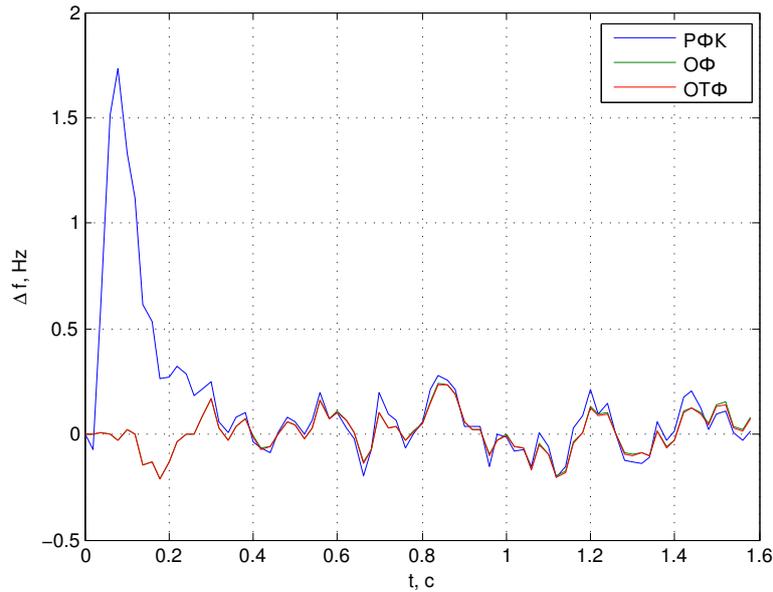


Рис. 8: Ошибка слежения за частотой при 30 дБГц

Распределение после 1 секунды наблюдений приведено на рис. 14. Апостериорная плотность вероятности существенно изменилась. Появилось два максимума, различающихся по уровню. Видно, что форма плотности вероятности для двух алгоритмов отличается, снова для оптимальной траекторной фильтрации верхушки более заострённые. Видимо, это связано с заменой операции интегрирования на операцию взятия максимума.

Распределение после 3 секунды слежения приведено на рис. 15. Плотность вероятности снова претерпела изменение, но результат работы двух алгоритмов всё-же близок. Соотношение двух локальных максимумов у алгоритмов заметно отличается, как и на предыдущем графике, однако положение самого большого максимума для двух алгоритмов совпадает.

Следует отметить, что в течении всего эксперимента правильное слежение за фазой сигнала не прекращалось, о чём свидетельствует график ошибки слежения за фазой, приведённый на рис. 16. На данном графике видно, что в расширенном фильтре Калмана произошёл срыв слежения, а два других алгоритма продолжили нормальную работу, причём графики их ошибок мало отличаются друг от друга.

3 Выводы

В результате сравнения трёх алгоритмов — оптимальной траекторной фильтрации, оптимальной фильтрации и расширенного фильтра Калмана можно сделать следующие выводы.

- Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации даёт практически те же результаты, что и алгоритм оптимальной фильтрации и может использоваться в качестве его замены при практической реализации.

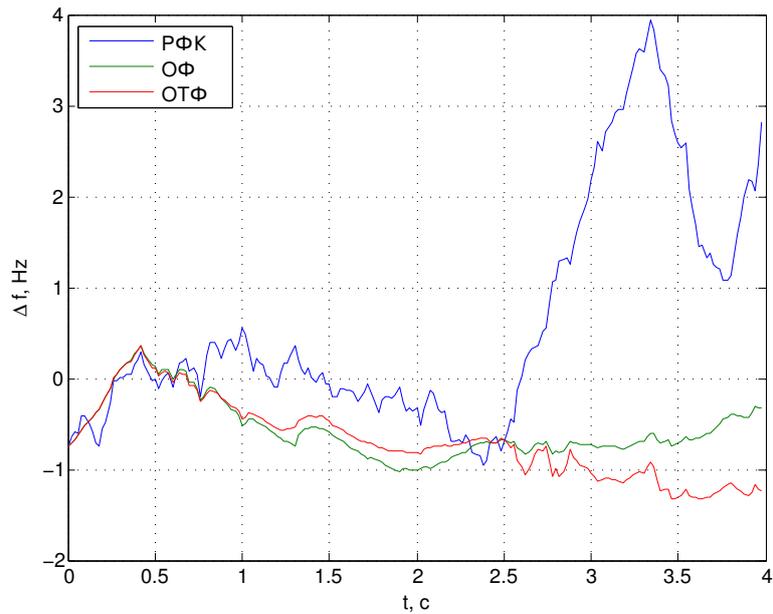


Рис. 9: Ошибка слежения за фазой при 20 дБГц

- Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации более прост в реализации, чем оптимальной фильтрации. В данном алгоритме исключаются сложные операции расчёта экспоненты, умножение и интегрирование (рис. 4).
- В то же время реализация алгоритма оптимальной траекторной фильтрации существенно сложнее, чем традиционная следящая система — расширенный фильтр Калмана. Это вызвано необходимостью хранить и обрабатывать большие многомерные массивы данных.
- Алгоритм оптимальной траекторной фильтрации позволяет обрабатывать более слабые сигналы, чем расширенный фильтр Калмана, т.к. в нём отсутствует в привычном виде срыв слежения (рис. 9).
- Точности всех алгоритмов (как и конкретные реализации ошибок слежения) близки при высоком отношении сигнал/шум (рис. 7). При снижении отношения сигнал/шум алгоритм оптимальной траекторной фильтрации демонстрирует более высокую точность оценки как фазы (рис. 11), так и частоты (рис. 12). Впрочем, при низких отношениях сигнал/шум, ниже границы срыва расширенного фильтра Калмана, точность оценки фазы такова, что она не имеет практического смысла, использовать можно только оценку частоты.

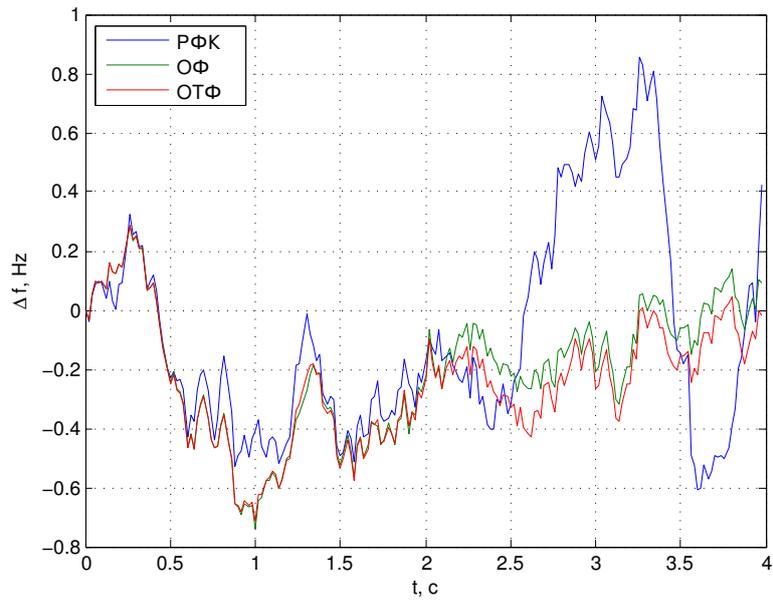


Рис. 10: Ошибка слежения зха частотой при 20 дБГц

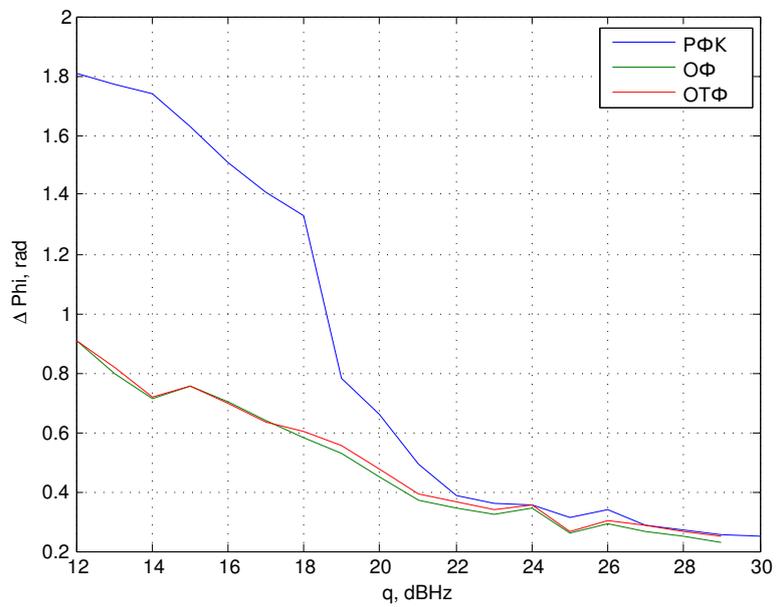


Рис. 11: Точность оценки фазы

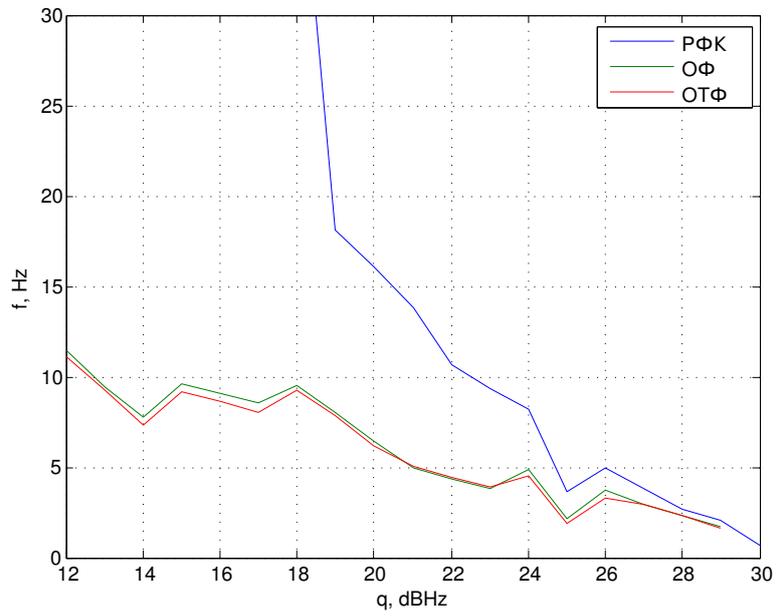


Рис. 12: Точность оценки частоты

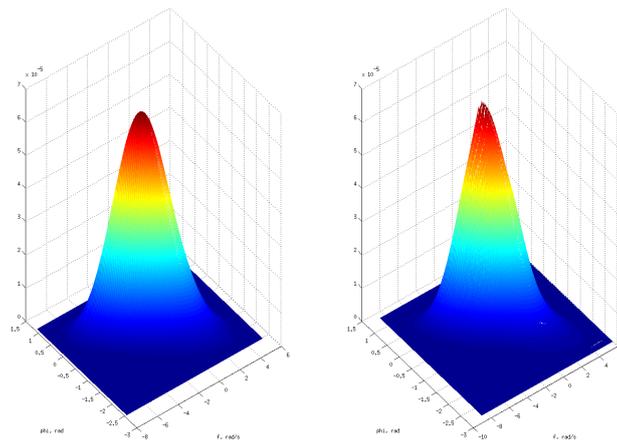


Рис. 13: Плотность вероятности на 0.5 с слежения

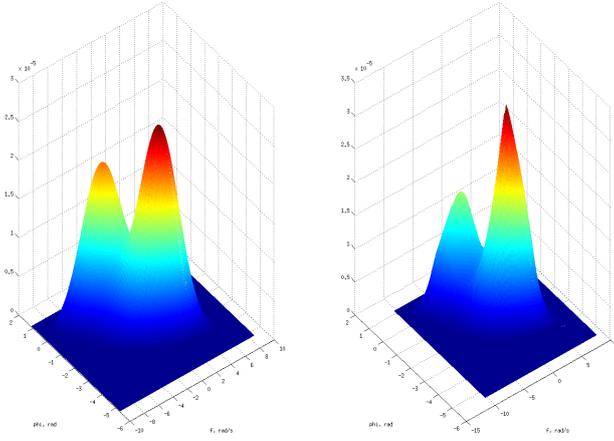


Рис. 14: Плотность вероятности на 1 с слежения

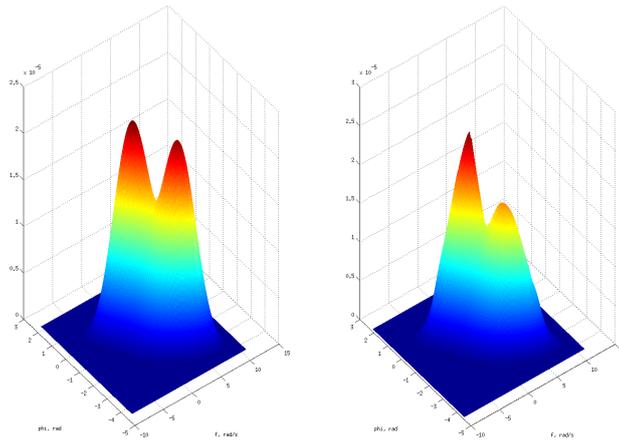


Рис. 15: Плотность вероятности на 3 с слежения

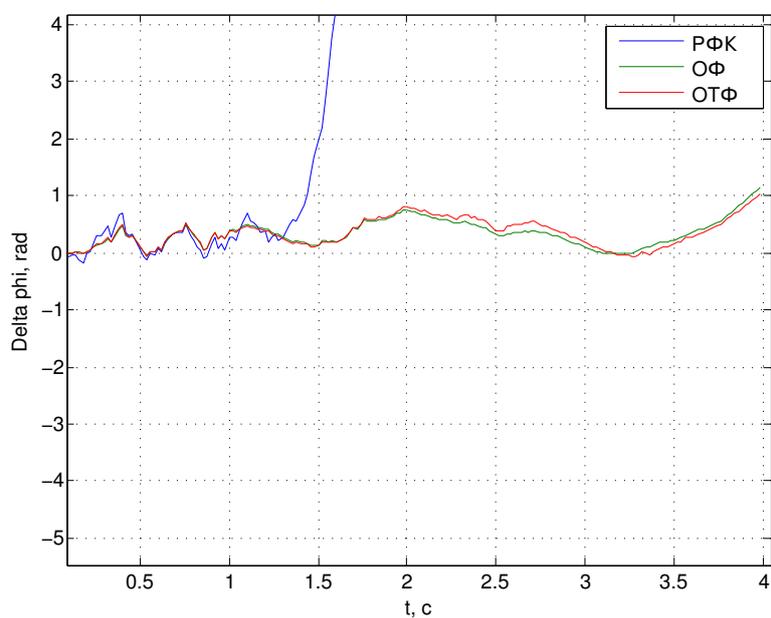


Рис. 16: Ошибка слежения за фазой